page 190 1/7 - 1992
ENSI Epreuve commune C

EPREUVE DE MATHEMATIQUES C

Durée : 4 heures

Commentaires et notations.

Ce problème comporte 5 parties. Dans les 4 premières, on cherche à résoudre des équations ou des systèmes d'équations dont les inconnues sont des nombres complexes ; en fait, on démontrera que toutes les solutions sont réelles. Si on vous demande le calcul explicite de certaines solutions, vous devez fournir des valeurs exactes, et non pas des valeurs décimales approchées. Les parties C et D sont indépendantes des parties A et B. Enfin, la dernière partie E est indépendante des autres ; elle présente une situation où interviennent des solutions des systèmes d'équations dont la résolution est le but des parties précédentes.

Il s'agit des systèmes d'équations S_n et S'_n à n inconnues $x_1, x_2, ..., x_n$, respectivement formés par les n équations suivantes :

$$S_n \begin{cases} x_1^2 = 1 + x_2 \\ x_2^2 = 1 + x_1 x_3 \\ x_3^2 = 1 + x_2 x_4 \\ \dots \quad \dots \\ x_{n-1}^2 = 1 + x_{n-2} x_n \\ x_n^2 = 1 + x_{n-1} \end{cases} \qquad S'_n \begin{cases} x_1^2 = 1 + x_2 \\ x_2^2 = 1 + x_1 x_3 \\ x_3^2 = 1 + x_2 x_4 \\ \dots \quad \dots \\ x_{n-1}^2 = 1 + x_{n-2} x_n \\ x_n^2 = 1 - x_{n-1} \end{cases}$$

Pour n égal à 2 ou 3, il s'agit des systèmes d'équations

$$S_2 \begin{cases} x_1^2 = 1 + x_2 \\ x_2^2 = 1 + x_1 \end{cases} \qquad S'_2 \begin{cases} x_1^2 = 1 + x_2 \\ x_2^2 = 1 - x_1 \end{cases}$$

$$S_3 \begin{cases} x_1^2 = 1 + x_2 \\ x_2^2 = 1 + x_1 x_3 \\ x_3^2 = 1 + x_2 \end{cases} \qquad S'_3 \begin{cases} x_1^2 = 1 + x_2 \\ x_2^2 = 1 + x_1 x_3 \\ x_3^2 = 1 - x_2 \end{cases}$$

Tournez la page S.V.P.

Résoudre S_n (resp.S'_n) équivaut à résoudre le système T_n (resp. T'_n) à (n+2) inconnues $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ formé par les n équations

$$x_j^2 = 1 + x_{j-1}x_{j+1} \qquad \text{avec } j = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

auxquelles on ajoute les 2 équations

$$x_0 = 1 \text{ et } x_{n+1} = 1 \qquad (\text{resp. } x_0 = 1 \text{ et } x_{n+1} = -1) ;$$

en effet, l'application qui à $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ associe $(1, x_1, x_2, \ldots, x_n, \pm 1)$, est une bijection de l'ensemble des solutions de S_n ou S'_n sur l'ensemble des solutions de T_n ou T'_n. Ceci montre que pour n = 1, le système S_n ou S'_n devient l'équation

$$S_1 : x_1^2 = 2, \qquad \text{ou } S'_1 : x_1^2 = 0.$$

On sera amené à distinguer deux espèces de solutions : les solutions primitives, dans lesquelles aucune des inconnues $x_1, x_2, \ldots$ ou x_n ne se voit attribuer la valeur 0, et les solutions non primitives dans lesquelles l'une au moins de ces inconnues devient nulle. Les parties C et D ont pour objectif la recherche des solutions primitives.

A) Préliminaires.

A1) On pose $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $X^* = (-x_1, x_2, -x_3, \ldots, (-1)^n x_n)$. Démontrez que si X est solution de S_n ou S'_n, X^* est aussi solution de S_n ou S'_n ; précisez selon les valeurs de n lequel de ces deux systèmes admet X^* comme solution.

A2) Trouvez les solutions de S_2 et S'_2.

A3) Trouvez les solutions de S_3.

A4) Trouvez les solutions de S'_3.

B) Recherche des solutions non primitives.

Cette partie a pour but de montrer que l'on connaît les solutions non primitives de S_n et S'_n dès que l'on connaît les solutions primitives de S_m et S'_m pour tout $m \leq n-2$; et pour cela, on introduit le système d'équations W_n à (n+4) inconnues $x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$ formé par les (n+2) équations

$$x_j^2 = 1 + x_{j-1}x_{j+1} \qquad \text{avec } j = 0, 1, 2, \ldots, n+1,$$

auxquelles on ajoute les 2 équations $x_{-1} = x_{n+2} = 0$. Dans la suite vous aurez besoin des solutions de W_n même lorsque $n = 0$ ou $n = -1$:

$$W_{-1}\begin{cases} x_{-1} = 0 \\ x_0^2 = 1 + x_{-1}x_1 \\ x_1 = 0 \end{cases} \qquad W_0\begin{cases} x_{-1} = 0 \\ x_0^2 = 1 + x_{-1}x_1 \\ x_1^2 = 1 + x_0x_2 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Une solution de W_n est dite primitive si aucune inconnue ne se voit attribuer la valeur 0, sauf x_{-1} et x_{n+2}.

Vous êtes invités à répondre avec concision aux questions de cette partie B.

B1) On suppose que $\xi = (x_{-1}, x_0, ..., x_{n+2})$ est une solution de W_n ; que pouvez-vous dire de $-\xi = (-x_1, -x_0, ..., -x_{n+2})$? Quelles sont les valeurs possibles de x_0 et x_{n+1} ?

B2) On suppose $n \geq 1$.

B2a) Expliquez comment vous obtenez les solutions de S_n et de S'_n quand vous connaissez celles de W_n.

B2b) Réciproquement, comment obtenez-vous les solutions de W_n quand vous connaissez celles de S_n et de S'_n ?

B3) On suppose $n \geq 0$. En vous inspirant des questions A1 et B1, expliquez comment de toute solution primitive de W_n vous pouvez déduire 3 autres solutions primitives, avec la conséquence que le nombre de solutions primitives de W_n est un multiple de 4.

B4) On suppose de nouveau $n \geq 1$.

B4a) Soit $(x_{-1}, x_0, ..., x_{n+2})$ une solution non primitive de W_n ; soient x_p et x_q deux termes nuls consécutifs dans cette suite, ce qui signifie que $-1 \leq p < q \leq n+2$, que $x_p = x_q = 0$ et que $x_j \neq 0$ si $p<j<q$. Démontrez que $q-p \geq 2$ et que la sous-suite $(x_p, x_{p+1}, ..., x_q)$ est une solution primitive de W_{q-p-3} .

B4b) Réciproquement soit $\xi = (x_{-1}, x_0, ..., x_{n+2})$ une suite de $(n+4)$ nombres présentant les deux propriétés suivantes : d'une part x_{-1} et x_{n+2} sont nuls, et ξ contient au moins un autre terme nul ; d'autre part, chaque fois que x_p et x_q sont deux termes nuls consécutifs, on a $q-p \geq 2$, et $(x_p, x_{p+1}, ..., x_q)$ est une solution primitive de W_{q-p-3} ; quelle autre propriété faut-il encore exiger de ξ pour pouvoir affirmer qu'il est solution de W_n ?

Tournez la page S.V.P.

B5) On vous demande maintenant une application directe des résultats précédents ; dans B5a et B5b vous pouvez répondre ou bien par des listes de solutions, ou bien par des descriptions des ensembles de solutions demandées, en indiquant alors le nombre des solutions, pour éviter tout malentendu.

B5a) Quelles sont les solutions primitives de W_{-1}, W_0, W_1, W_2 et W_3 ?

B5b) Quelles sont les solutions non primitives de S_4 ?

C) Les polynômes P_n.

C1) Démontrez qu'il existe une suite infinie de fonctions rationnelles, notées $P_n(x)$ ou P_n (avec $n \geq 0$), telle que

$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x,$

$P_n(x)^2 = 1 + P_{n-1}(x)P_{n+1}(x)$ pour tout $n \geq 1$;

démontrez en même temps que chaque quotient $P_n(x) / x^n$ tend vers 1 lorsque x tend vers l'infini.

C2) Calculez P_2, P_3 et P_4.

C3) Vous allez maintenant démontrer que ces fonctions rationnelles sont des polynômes. Vous supposez que P_n, P_{n-1}, P_{n-2} et P_{n-3} sont des polynômes (hypothèse de récurrence), et que P_{n+1} n'est pas un polynôme (pour démontrer par l'absurde qu'il doit être un polynôme). Vous utiliserez les 3 égalités

$E_n : P_n^2 = 1 + P_{n-1}P_{n+1},$
$E_{n-1} : P_{n-1}^2 = 1 + P_{n-2}P_n,$
$E_{n-2} : P_{n-2}^2 = 1 + P_{n-3}P_{n-1}.$

Démontrez avec ces hypothèses les 5 assertions suivantes.

C3a) Il existe un nombre complexe a, un entier $p \geq 1$ et deux polynômes A(x) et B(x) tels que

$$P_{n+1}(x) = \frac{B(x)}{(x-a)^p A(x)}, \qquad A(a) \neq 0 \text{ et } B(a) \neq 0.$$

C3b) Il existe un entier $r \geq 0$ et un polynôme D(x) tels que

$P_{n-1}(x) = (x-a)^{p+r} D(x)$ et $D(a) \neq 0.$

C3c) $P_{n-2}(a) = \pm 1, \quad P_n(a) = -P_{n-2}(a)$ et $r \geq 1.$

C3d) Posons $b = P_n(a)$; puisque les polynômes $P_n(x) - b$ et $P_{n-2}(x) + b$ sont divisibles par $(x-a)$, il existe des entiers q et s strictement positifs et des polynômes C(x) et E(x) non nuls au point a tels que

$$P_n(x) = b + (x - a)^q C(x) \quad \text{et} \quad P_{n-2}(x) = -b + (x - a)^s E(x) ;$$

l'assertion à démontrer est que $q = r$ et $s = r$.

C3e) Les résultats précédents sont incompatibles avec l'égalité E_{n-2} .

C4) Sachant que chaque P_n est un polynôme, indiquez son degré et son monôme de plus haut degré, et démontrez qu'il est pair ou impair, c'est-à-dire $P_n(-x) = \pm P_n(x)$.

D) Les racines des polynômes P_n .

D1) Quelles sont les racines de P_1, P_2 et P_3 ?

D2) Vous allez démontrer que chaque polynôme P_n (avec $n \geq 1$) possède n racines réelles distinctes, et qu'elles sont séparées par celles de P_{n-1} si $n \geq 2$. Procédez par récurrence ; supposez que P_{n-1} possède (n-1) racines $a_1, ..., a_{n-1}$, et que P_n possède n racines $b_1, ..., b_n$, qui sont séparées par les précédentes, ce qui signifie que

$$b_1 > a_1 > b_2 > a_2 > ... ... > a_{n-1} > b_n,$$

si les racines sont rangées par ordre <u>décroissant</u>.

D2a) Quel est le signe de $P_{n-1}(b_j)$ pour $j = 1, 2, ..., n$?

D2b) Trouvez la valeur exacte de $P_{n-1}(b_j)P_{n+1}(b_j)$.

D2c) Quel est le signe de $P_{n+1}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$?

D2d) Démontrez que le polynôme P_{n+1} possède une racine c_j dans chaque intervalle $]b_j, b_{j-1}[$ (avec $j = 2, 3, ..., n$), ainsi qu'une racine c_1 dans $]b_1, +\infty[$ et une racine c_{n+1} dans $]-\infty, b_n[$.

Tournez la page S.V.P.

D3) Soient $d_1, d_2, ..., d_{n+2}$ les racines de P_{n+2} rangées par ordre décroissant ; une racine de P_{n+2} est dite primitive si elle n'est racine d'aucun polynôme précédent $P_1, P_2, ...$ ou P_{n+1}. Démontrez que les solutions primitives de S_n (resp S'_n) s'obtiennent toutes ainsi : on choisit une racine d_r de P_{n+2} de rang r impair (resp. pair), qui soit primitive, et l'on pose $x_j = P_j(d_r)$ pour $j = 1, 2, ..., n$.

D4) Expérimentez cette méthode de recherche des solutions primitives lorsque $n = 2$; pour trouver les racines de P_4, vous pouvez l'écrire sous la forme $(x^2 - u)^2 - v^2x^2$, où u et v sont des constantes à déterminer.

E) Recherche des extremums d'une fonction.

Soit n un entier > 2 et soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des suites $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de n nombres réels strictement positifs ; les lettres x_0 et x_{n+1} ne représentent pas des variables comme $x_1, ..., x_n$, mais des constantes égales à 1. Sur le domaine $\mathcal{D}$ on définit la fonction f que voici :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{x_i x_{i+1}} + \frac{x_i}{x_{i+1}} + \frac{x_{i+1}}{x_i}\right) \quad ;$$

E1) Calculez la dérivée partielle $\partial f / \partial x_i$ pour i = 1, 2, ..., n. Vérifier que les n dérivées partielles s'annulent simultanément au point X si et seulement si X est solution de S_n.

E2) Soit X un élément de $\mathcal{D}$ qui soit solution de S_n ; on veut trouver un critère (condition suffisante mais peut-être pas nécessaire) qui permette de prouver que f possède un minimum relatif au point X. Soit A_{ij} la valeur de la dérivée seconde $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$ au point X, et soit Q la forme quadratique

$$Q(h_1, h_2, ..., h_n) = \frac{1}{2}\sum_i A_{ii}h_i^2 + \sum_{i<j} A_{ij}h_i h_j \quad ;$$

on rappelle que si Q est définie positive, f possède un minimum relatif au point X.

E2a) Calculez les coefficients A_{ij} et démontrez que Q est égale à

$$\frac{h_1^2}{x_1} + \frac{h_n^2}{x_n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i^2 + (x_{i-1}x_{i+2} - x_i x_{i+1})h_i h_{i+1} + h_{i+1}^2}{x_i x_{i+1}} \; ;$$

on vous demande de faire avec soin et clarté ce calcul qui fait intervenir l'hypothèse que X est solution de S_n .

E2b) Démontrer que les (n - 1) inégalités

$$| x_i x_{i+1} - x_{i-1}x_{i+2} | \leq 2 \qquad (i = 1, 2, ..., n - 1)$$

impliquent que Q est définie positive.

E3) On suppose que n = 3 ; est-ce que le critère établi en E2 s'applique au point $X = (\sqrt{3}, 2, \sqrt{3})$ qui représente une solution de S_3 ?
